



گزینه ۲

۱

ابتدا حد تابع $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ را وقتی $x \rightarrow 0^-$ به دست می آوریم. اگر حاصل حد تابع محاسبه شده در قسمت قبل را L در نظر بگیریم، باید $\lim_{x \rightarrow L} f(x)$ را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{0 - 1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پس باید حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - |x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

مرز ضابطه ها خیلی شفاف مشخص نشده است. باتوجه به نامعادلات قدر مطلق، ضابطه ها را با مرز شفاف آن یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ x[x] & , \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد. می‌دانیم خط $x = 3$ بالای خط $x = 1$ قرار دارد، بنابراین باید برای به دست آوردن نقطه برخورد آن با محور عرض ها از ضابطه $f(x) = ax + b$ استفاده کرد. بررسی پیوستگی تابع در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] \Rightarrow a + b = 1 \times 0 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (I)$$

بررسی پیوستگی تابع در $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} ax + b = -a + b, \quad f(-1) = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = (-1)[-1^+] = (-1)(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow -a + b = 1 \quad (II)$$

از دو رابطه (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \xrightarrow{(I)} a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow ax + b = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \xrightarrow{x=3} f(3) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

حاصل حد، وقتی $x \rightarrow 1$ ، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5 - x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{5 - x}}{2 + \sqrt{5 - x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(2 + \sqrt{5 - x})}{(4 - 5 + x)(1 + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(2 + \sqrt{5 - x})}{(x - 1)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2 + \sqrt{5 - x})}{1 + \sqrt{x}} = \frac{-(2 + 2)}{1 + 1} = -\frac{4}{2} = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \left[\frac{-2}{x^2} \right] = \left[\frac{-2}{(\frac{1}{e})^-} \right] = [-(e^+)] = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \left[\frac{3}{x^2} \right] = \left[\frac{3}{(\frac{1}{e})^-} \right] = [12^+] = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{16x + 9}{24x + 12} = \frac{1}{(-12)^+ + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{(2x + 1)(x + 2)} - \frac{4}{(x + 2)(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3(x - 2) - 4(2x + 1)}{(2x + 1)(x + 2)(x - 2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-5(x + 2)}{(2x + 1)(x + 2)(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-5}{(2x + 1)(x - 2)} \right) = -\frac{5}{12}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

ابتدا تعیین می‌کنیم مقادیر $f(x)$ به ازای $x \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ چند است:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

ضابطه $g(x)$ را باتوجه به مقادیر $f(x)$ تشکیل داده و بررسی می‌کنیم در بازه $[-4, 4]$ تابع در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1 ; x \in \mathbb{R}$$

در تمام نقاط بازه $[-4, 4]$ تابع $g(x) = -1$ (چون یک تابع ثابت است) پیوسته است. پس تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

باتوجه به نمودار $f(0) = 0$ است، پس داریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{0+b}{0-1} = 0 \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow b = 0$$

ازطرفی تابع در نقطه $x = 1$ تعریف نشده است، چون $x = 1$ ریشه مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x \rightarrow 1$ باید برابر صفر باشد که تابع به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ دربیاید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} + ax + b = 0 \Rightarrow f + a = 0 \Rightarrow a = -f$$

بنابراین داریم: $(a, b) = (-f, 0)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

$$f(x) = [x] \sin \pi x ; x \in [-2, 2]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما از آنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.
پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطه ناپیوستگی داریم.
کلید سنجش صفر نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

الف) نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ نقاطی هستند که در آن عبارت $\frac{1}{3}x - 1$ برابر یک عدد صحیح شود. (اصولاً نقاطی که در آن عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد صحیح شود، نقاط ناپیوستگی تابع جزء صحیح محسوب می شوند.)

ب) $\frac{1}{3}x - 1$ را برابر عدد صحیح K فرض کرده و مشخص می کنیم در چه نقاطی از بازه $(0, 9)$ برابر عدد صحیح می شود. سپس در آن نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

گام دوم

$$\frac{1}{3}x - 1 = K \Rightarrow \frac{1}{3}x = K + 1 \Rightarrow x = 3K + 3, \quad x \in (0, 9)$$

x یک عدد مضرب ۳ به دست می آید. در بازه $(0, 9)$ دو عدد مضرب ۳ وجود دارد، $x = 3$ و $x = 6$. پیوستگی تابع را در این نقاط بررسی می کنیم:

بررسی پیوستگی تابع در $x = 3$:

تابع $f(x)$ قطعاً در $x = 3$ پیوسته است. زیرا در ضابطه تابع عامل صفر کننده $(x - 3)$ وجود دارد که باعث می شود بدون توجه به مقادیری که تابع جزء صحیح به خود می گیرد، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر صفر شود. در نتیجه تابع در این نقطه پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x = 6$:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (x - 3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (6 - 3) [1^-] = 3 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (x - 3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (6 - 3) [1^+] = 3 \times 1 = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$$

تابع در $x = 6$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)$ در بازه $(0, 9)$ تنها در ۱ نقطه ناپیوسته است.

نکته:

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin(-x) \cos 2x}{\sqrt{2(1 + \cos x)}} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin(-x) \cos 2x}{\sqrt{2(1 + \cos x)}} = -2 \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x \cos 2x}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = - \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\left| \cos \frac{x}{2} \right|}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\cos \frac{x}{2}} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر شده و در نتیجه حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده شده را ساده کرده و حد آن را به دست می آوریم:

$$۱) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow 1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$= (\sin x - \cos x)^2 \Rightarrow 1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$$

$$۲) \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \tan x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\cos x - \sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2 \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

برای اینکه تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در $x = -1$ که مرز ضابطه های تابع است نیز پیوسته باشد. پس پیوستگی تابع را در نقطه ای به طول $x = -1$ بررسی می کنیم. حد چپ تابع در نقطه ای به طول $x = -1$ برابر $\frac{0}{0}$ و مبهم است. بنابراین برای به دست آوردن حد چپ صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کرده و با ساده کردن آن حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} \times \frac{2 + \sqrt{3-x}}{2 + \sqrt{3-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(4 - 3 + x)}{(x+1)(2 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+1)}{(x+1)(2 + \sqrt{3-x})} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{4}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} ax + 1 = -a + 1, \quad f(-1) = -a + 1$$

طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow -a + 1 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow -a &= -\frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ از ضابطه پایین که در آن $x \geq 1$ است، استفاده می کنیم.
ب) برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ از ضابطه بالا که $x > 1$ است، بهره می بریم.

گام دوم

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2a = (1)^2 + 2a = 2a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax - 1 = a(1) - 1 = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 2a + 1 - (a - 1) = -1 \\ \Rightarrow 2a + 1 - a + 1 &= -1 \Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3\end{aligned}$$

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ دارای حد است در صورتی که:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = -1$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + a)^2 = (-1 + a)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x + 1) = -2 + 1 = -1$$

باتوجه به گام اول در صورتی حد تابع در نقطه $x = -1$ موجود است که تساوی $(-1 + a)^2 = -1$ برقرار باشد اما این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست؛ بنابراین مجموعه مقادیر a برابر $\emptyset$ می‌شود.

$\cot x$ را برابر $\frac{1}{\tan x}$ فرض کرده و عبارت را بر حسب $\tan x$ به دست می‌آوریم و حاصل حد را وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است، پس $p(4) = 3$.

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است، پس $p(-2) = 1$.

حال باقی‌مانده تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = 2$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^2) + 4p(-x) = p(2^2) + 4p(-2)$$

$$= p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 \times 1 = 7$$

اگر قرار باشد تابع $f(x)$ در نقاطی ناپیوسته باشد، باید دنبال نقاطی باشیم که در آن $[x]$ ناپیوسته است. در تابع $y = [x]$ نقاط $x \in \mathbb{Z}$ نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ هستند. (در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ خود تابع $y = [x]$ همواره ناپیوسته است، اما ممکن است تابع $f(x)$ در این نقاط پیوسته باشد. پس باید نقاط $x \in \mathbb{Z}$ در بازه $(2, 6)$ را مورد بررسی قرار دهیم.) پس برای تعیین تعداد نقاط ناپیوستگی، نقاط $x = 3$ ، $x = 4$ و $x = 5$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sin(x - [x])\pi = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sin(x - 2)\pi = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(3 - 3)\pi = \sin 0 = 0$$

$$f(3) = \sin(3 - 3)\pi = \sin 0 = 0$$

بنابراین تابع در $x = 3$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sin(x - [x])\pi = \sin(4 - 3)\pi = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(4 - 4)\pi = \sin 0 = 0$$

$$f(4) = \sin(4 - 4)\pi = \sin 0 = 0$$

تابع در $x = 4$ هم پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \sin(x - [x])\pi = \sin(5 - 4)\pi = \sin \pi = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(5 - 5)\pi = \sin 0 = 0$$

$$f(5) = \sin(5 - 5)\pi = \sin 0 = 0$$

تابع در $x = 5$ هم پیوسته است. ثابت شد تابع در کلیه نقاط مشکوک به ناپیوستگی پیوسته است بنابراین تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ برابر صفر می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

حاصل حد مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x - 2$ ، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6 - x^2 - x}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-(x-2)(x+3)}{x(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)}{x} = \frac{-5}{2}\end{aligned}$$

گزینه ۲

چون $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ است، پس باید مخرج کسر در همسایگی $x = 2$ مثبت و به ازای $x = 2$ صفر شود. یعنی معادله $x^2 + ax + b = 0$ باید ریشه مضاعف $x = 2$ داشته باشد و در نتیجه:

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

با مقایسه دو عبارت $x^2 + ax + b$ و $x^2 - 4x + 4$ نتیجه می‌شود که $a = -4$ و $b = 4$ ، پس $a + b = 0$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

گزینه ۳

شرط پیوستگی تابع در نقطه $x = 1$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

بنابراین داریم:

$$f(1) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{1} = 2$$

پس به ازای هر مقدار a ، تابع در $x = 1$ پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} 2^{1-2n} = \frac{1}{2^{-1+2n}} \rightarrow 0 \\ 2^{2n+1} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

راه حل اول:

با استفاده از قاعده پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{1-2n}(2^{4n} - 1)}{2^{1-2n}(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} - 1}{2^{4n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^{4n} + 3) - 3}{(2^{4n} + 3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\frac{3}{2^{4n} + 3}}_0 = 1 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 1$ محاسبه می‌کنیم. برای این که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد، باید رابطه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$ برقرار باشد. این رابطه را بررسی کرده و مقداری از a را تعیین می‌کنیم که به ازای آن تابع پیوسته باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{-(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt[3]{(1 - \sqrt{x})^2(1 + \sqrt{x})}} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ فاقد حد است بنابراین به ازای هیچ مقدار a در $x = 1$ پیوسته نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

چون $f(x) = x^2 + 2x$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، بنابراین $f(-2) = 0$ است.

$$f(x) = x^2 + ax^2 - \lambda x \Rightarrow f(-2) = 16 - 4a + 16 = 0$$

$$\Rightarrow 4a = 32 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow f(x) = x^2 + 8x^2 - \lambda x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x + 2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r} x^2 + 8x^2 - \lambda x \quad | \quad x + 2 \\ -(x^2 + 2x^2) \quad | \quad \hline 2x^2 - \lambda x \\ -(2x^2 + 4x) \quad | \quad \hline -4x - \lambda x \\ -(-4x - \lambda x) \quad | \quad \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 2)(x^2 + 2x^2 - 4x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x) = 0$ برابر با $x = -1 - \sqrt{5}$ است.

اگر $x = 2k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin \frac{\pi}{2}x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k \in \mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و در نتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است.

حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x = 2k + 1$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطه فردی مانند $x = 1$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2}x = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2}x = (-1)^0 \sin \frac{\pi}{2} = (1)(1) = 1$$

$$f(1) = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$ در اعداد فرد ناپیوسته است

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطه $x = 2$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} \times \frac{x + \sqrt{2x}}{x + \sqrt{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{(2 - x)(x + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{(2 - x)(x + \sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{x + \sqrt{2x}} = \frac{-2}{2 + 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

باتوجه به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = 2$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin^2 x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{-(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{2 \sin x + 1}{\sin x + 1} \right) = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = \frac{3\pi}{4}$ پیوسته است؛ بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = \frac{3\pi}{4}$ به دست آورده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} a \sin^2 x = a \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = a \sin^2 \frac{\pi}{4} = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، در این صورت حاصل $[x] + [-x] = -1$ است.

گام دوم

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t) \Rightarrow a = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همه نقاط این بازه پیوسته باشد.ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطه داده شده روی بازه $[1, +\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطه $x = 6$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi x}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(6) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = a + \frac{3}{4}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = 6$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x^n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x} = \frac{a}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[n]{x^n - 1}}{x - 1} \times \frac{\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2}{\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{27}x^3 - x^2 + 1}{(x - 1)\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(x - \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{27}x^2 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right)}{\cancel{(x - \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x\sqrt[n]{x^n - 1} + (\sqrt[n]{x^n - 1})^2 \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{1 \times \left(\frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{3} + 1 \right)} = \frac{2}{27} = \frac{1}{27}$$

$$\frac{\frac{1}{27}x^3 - x^2 + 1}{\frac{1}{27}x^3 - \frac{x}{9} - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{-\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{9}x^2}{-\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{9}x^2}$$

$$-\frac{1}{9}x^2 + 1$$

$$+\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{27}x$$

$$-\frac{1}{27}x + 1$$

$$+\frac{1}{27}x - 1$$

۰

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}}{4}$$
$$= \frac{\frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{4 - 3}{4}}{4} = \frac{1}{24}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ضابطه تابع شامل یک عبارت قدر مطلق است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -2 & & 1 \\ \hline x^2+x-2 & + & \circ & - & \circ & + \end{array}$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x \leq -2 \\ \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} & ; -2 < x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

اکنون باتوجه به قسمت الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x - 2) = -1 - 2 = -3$$

باتوجه به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطه $x = 1$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a ، در نقطه $x = 1$ پیوسته نخواهد بود.

$$\text{دامنه} \rightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ 1 + \sqrt[3]{x+1} \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \\ x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-4, +\infty) - \{-2\}$$

بنابراین تنها در $x = -2$ ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش ۱ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

حاصل حد، وقتی $x \rightarrow -1$ ، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} \times \frac{2x - \sqrt{3-x}}{2x - \sqrt{3-x}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x)^2 - (\sqrt{3-x})^2}{(x^2 + x)(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3 + x}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x-3}{x(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \frac{-4-3}{(-1)(-2-2)} = \frac{-7}{(-1)(-4)} = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = 2$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجه صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = 3$ است. همچنین طبق قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

حال $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.
روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 4x - 2)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 8x + 4)} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = -\frac{6}{17}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 6x^2 + 1 & x - \frac{1}{2} \\ \hline -4x^3 + 2x^2 & \\ \hline -4x^2 + 1 & \\ 4x^2 - 2x & \\ \hline -2x + 1 & \\ 2x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 7x^2 - 2 & x - \frac{1}{2} \\ \hline -2x^3 + x^2 & \\ \hline 8x^2 - 2 & \\ -8x^2 + 4x & \\ \hline 4x - 2 & \\ -4x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

روش دوم: هوییتال

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \sin \frac{\pi}{\pi} [\cos (\frac{\pi}{\pi})^+] - \cos \pi [\sin (\pi)^+] \\ &= 1 \times [0^-] - (-1)[0^+] = 1 \times (-1) - 0 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \sin \frac{\pi}{\pi} [\cos (\frac{\pi}{\pi})^-] - \cos \pi [\sin (\pi)^-] \\ &= 1 \times [0^+] - (-1)[0^-] = 0 + (-1) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۶

گام اول

الف) همسایگی مورد نظر زیر مجموعه ای از نامعادله داده شده است. پس ابتدا باید محدوده قابل قبول که از حل نامعادله به دست می آید را تعیین کنیم.

ب) توجه کنید که $x = \frac{1}{\pi}$ ریشه مخرج کسر بوده و به ازای آن کسر "تعریف نشده" می شود. پس در نهایت باید از محدوده جواب خارج کنیم.

گام دوم

$$\left| \frac{x-3}{2x-1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{|x-3|}{|2x-1|} > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2}} |x-3| > |2x-1|$$

دو طرف نامعادله دارای مقادیر نامنفی هستند. پس با خیال راحت آن ها را به توان دو می رسانیم:

$$\begin{aligned}|x-3|^2 &> |2x-1|^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 > 4x^2 - 4x + 1 \\ \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 &< 0 \Rightarrow (3x-4)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{4}{3}\end{aligned}$$

با خارج کردن $x = \frac{1}{\pi}$ از محدوده جواب، مقادیری که x می تواند بپذیرد به صورت زیر خواهد بود:

$$x \in (-2, \frac{4}{3}) - \left\{ \frac{1}{\pi} \right\} \Rightarrow x \in (-2, \frac{1}{\pi}) \cup (\frac{1}{\pi}, \frac{4}{3})$$

همسایگی با بیشترین شعاع ممکن خواسته شده است. پس بازه $(-2, \frac{1}{\pi})$ را که بزرگ تر است، انتخاب کرده و مرکز همسایگی را به دست می آوریم:

$$a = \frac{-2 + \frac{1}{\pi}}{2} = \frac{-\frac{2}{\pi}}{2} = -\frac{1}{\pi}$$

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \cos^3 x = a \cos^3 \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cos^3 \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \Rightarrow \sqrt{2} a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در $x = 0$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ است.

گام دوم

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} \Rightarrow a = 1 + \sqrt{1-0} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a = 2
 \end{aligned}$$

گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) نمودار تابع از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند.
 ب) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{a}|x + \frac{b}{2a}|$$

گام دوم

باتوجه به قسمت الف) از گام اول داریم:

$$f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} \xrightarrow{f(2)=1} 1 = \frac{2a + 1 + 5}{4} \Rightarrow 2a + 6 = 4$$

$$\Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

باتوجه به قسمت ب) از گام اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{4x^2 + 9} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + 2x}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{3x - 2} = \frac{1}{3}$$

با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |2x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x \rightarrow 0^-$ عبارت $x^3 - x$ به سمت 0^+ میل می کند یا 0^- . برای این کار از تغییر متغیر $x^3 - x = t$ استفاده می کنیم. با تعیین محدوده t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه های داده شده به دست می آوریم.

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow x^3 > x \Rightarrow x^3 - x > 0 \xrightarrow{x^3 - x = t} t > 0 \Rightarrow t \rightarrow 0^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ یا همان $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ باید از ضابطه بالا که مربوط به x های مثبت است، استفاده کنیم:

$$t \rightarrow 0^+ \Rightarrow t > 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{1-t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1-t} = \sqrt{1-0} = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

طبق صورت سؤال نتیجه می گیریم که $P\left(\frac{1}{p}\right) = 0$ ، بنابراین:

$$2\left(\frac{1}{p}\right)^4 + a\left(\frac{1}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{p}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{p}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} - 1 = 0 \Rightarrow a = 7$$

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 2$ برابر با $P(-2)$ است، پس داریم:

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow P(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ ، ابتدا لازم است حد چپ و راست تابع را در این نقطه به دست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + ax = 1 - a$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+a}$$

باتوجه به گام اول داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{1}{-1+a} = 1 - a$$

$$\Rightarrow -(1-a)(1-a) = 1 \Rightarrow -(1-a)^2 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \quad (*)$$

معادله (*) فاقد ریشه حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر $\emptyset$ می‌شود.

ابتدا حاصل حد تابع $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2}$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر -1 قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم. وقتی $x \rightarrow +\infty$ عبارت $x^2 - 4$ مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشی کرد. برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2}$$

برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ ، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow |x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x^2 - 4)}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{-2 - 2}{-2 - 1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

ابتدا ضابطه $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. برای این کار کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f(x)$ را جایگزین کنیم. در ادامه حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (حد توان تابع $g(f(x))$) را وقتی $x \rightarrow 1^+$ تعیین کرده، سپس حاصل حد تابع $g(f(x))$ را به دست می آوریم.

$$g(f(x)) = 2^{\frac{2x+5}{x^2-4x+3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 5}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 5}{(x - 3)(x - 1)} = \frac{7}{(-2)(0^+)} = -\infty$$

و حالا محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = \lim_{f(x) \rightarrow -\infty} g(f(x)) = \lim_{f(x) \rightarrow -\infty} 2^{f(x)} = 2^{-\infty} = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2| + |x| - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

راه حل اول: با استفاده از هوییتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} &= \frac{0}{0} \\ \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{7}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} &= \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5} \end{aligned}$$

راه حل دوم: ابهام $\frac{0}{0}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 7\sqrt{x} + 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{4x^2 - 3x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 5)(2x + \sqrt{3x+1})}{(x-1)(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{3x+1})}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)(4x+1)} \\ &= \frac{-3 \times 4}{2 \times 5} = \frac{-12}{10} = -1\frac{1}{5} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

باتوجه به ضابطه تابع f ، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = 6 - [2^-] = 6 - 1 = 5 \\ f(2) = a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x = 2$ پیوسته باشد، باید $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ پس باتوجه به مقادیر به دست آمده در بالا، از آنجاکه $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ، بنابراین تابع f در $x = 2$ به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.
تذکر:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} [a^-] = a - 1 \\ [a^+] = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

می‌دانیم: $[۲^-] = ۱$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2(1)}{2-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x(x-2)} + \frac{2}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) وقتی $x \rightarrow 3$ حد عبارت صورت برابر -۱ است. پس حد عبارت مخرج باید برابر 0^+ شود تا حاصل حد برابر $-\infty$ شود. حد عبارت مخرج وقتی $x \rightarrow 3$ در صورتی 0^+ می‌شود که $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج باشد (حاصل حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 3^+$ و $x \rightarrow 3^-$ باید برابر 0^+ شود).
ب) مخرج باید به صورت $2(x-3)^2$ باشد تا بتوان گفت $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج است.

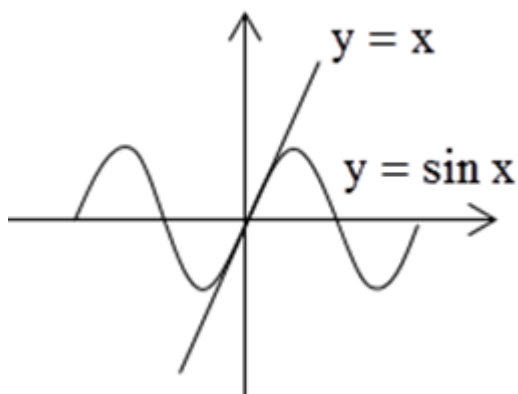
گام دوم

$$\begin{aligned}2(x-3)^2 &= 2(x^2-6x+9) = 2x^2-12x+18 = 2x^2+ax+b \\ \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 18 \end{cases} &\Rightarrow a+b = -12+18 = 6\end{aligned}$$

در مورد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، رابطه زیر برقرار است:

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. با استفاده از تساوی داده شده می توان گفت $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود و تابع $\frac{x}{\sin x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود. با استفاده از نمودار دو تابع نیز می توان دریافت که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = 0$$



همان طور که مشاهده می کنید اگر $x > 0$ باشد نمودار $y = x$ بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد و اگر $x < 0$ باشد نمودار $y = x$ پایین تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد.

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = [1^+] = 1$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0$$

بنابراین حد عبارت داده شده وقتی $x \rightarrow 0$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] + 2 \left[\frac{x}{\sin x} \right] = 0 + 2(1) = 0 + 2 = 2$$

با استفاده از اتحاد $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 - \sqrt[3]{x+6})(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})}{\sqrt{(x-2)^2}(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 - x)}{(x-2)(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} = -\frac{1}{4 + 4 + 4} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

روش دوم: (هوپیتال - فراتر از کتاب)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} = \frac{0}{0} \\ &\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} \xrightarrow{x-2 > 0} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{3}(x+6)^{-\frac{4}{3}}}{1} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}(2+6)^{-\frac{4}{3}}}{1} = -\frac{1}{3 \times 4} = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

می‌دانیم: $\sqrt{x^2 + 5} \sim x$ $x \rightarrow \infty$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجهٔ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج با هم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرایب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{ax^n + 4}$$

$$\xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{ax + 4} = \frac{-1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4}$$

اکنون حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} \times \frac{3 + \sqrt{x^2 + 5}}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - x^2 - 5}{2(2 - x)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{2(2 - x)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + x}{2(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \frac{2 + 2}{2(3 + \sqrt{4 + 5})} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

برای پیوستگی این تابع در $\mathbb{R}$ ، بایستی در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+\sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{3(2+2)}{2+1} = 4$$

ضمناً برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از قاعده هوییتال نیز می‌توانید استفاده کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

حال برای پیوستگی f در $x = 2$ ، مقدار تابع را برابر حد آن قرار می‌دهیم:

$$2a - 1 = 4 \Rightarrow a = \frac{5}{2} = 2.5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{|\sin x + \cos x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x) \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x (\sin x + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{\overbrace{[(-2)^-]}^{-3} + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{0}{0^-} = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = a \log_3^+ = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3a + 1 \end{cases} \Rightarrow 3a + 1 = 2a \Rightarrow a = -1$$

$$x < 3 : f(x) = ax + 2^{x-3} = -x + 2^{x-3}$$

$$f(2) = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -1/2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-$ ، حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. برای رفع ابهام می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را ساده کرد (می‌توان از روش‌های دیگری مانند هوییتال نیز استفاده کرد):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\cot x = \frac{1}{\tan x}} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x}}{1 + \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-1} = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

می‌دانیم: $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ ، حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{-(\sin^2 x - \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \rightarrow \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجه صورت و بزرگ‌ترین درجه مخرج کسر با هم برابر است.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2 + 15x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \sqrt{4} \left| x + \frac{15}{8} \right| = -2 \left(x + \frac{15}{8} \right)$$

(دقت کنید که چون $x \rightarrow -\infty$ بود، قرینه عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه به قسمت ب) از گام اول، $n = 1$ است. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 15}{3x - (-2(x + \frac{15}{8}))} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 15}{3x + 2x + \frac{15}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 15}{5x + \frac{15}{4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 3$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعده هسپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{8x + 15}{2\sqrt{4x^2 + 15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{24 + 15}{2\sqrt{36 + 45}}}$$

$$= \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = \frac{-5}{\frac{5}{6}} = -6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -6$$

روش دوم:

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} &\times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x - 3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{9x^2 - 4x^2 - 15x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x - 3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{5x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{x} = -\frac{9 + 9}{3} = -\frac{18}{3} = -6 \end{aligned}$$

گزینه ۱

۶۲

$f(-2) = a$: مقدار تابع

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^3}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x + 2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 2x + 4) = -(4 + 4 + 4) = -12 \end{aligned}$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -12$ باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = -2$$

باتوجه به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جمله صورت بر بزرگ‌ترین جمله مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m + 3 = n - 2$
بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

و همچنین:

$$m + 3 = n - 2 \xrightarrow{m = -\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} + 3 = n - 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2}$$

بنابراین داریم:

$$m + n = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

گام اول

حاصل حد $\infty - \infty$ و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام و به دست آوردن حاصل حد، از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می‌کنیم:

$$n = 3 \Rightarrow \text{عدد فرد} \Rightarrow \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right)$$

$$\sqrt[3]{\lambda x^3 + 2x^2} \sim \sqrt[3]{\lambda} \left(x + \frac{2}{3\lambda} \right) = 2 \left(x + \frac{1}{12} \right) = 2x + \frac{1}{6}$$

حالا حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{\lambda x^3 + 2x^2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \frac{1}{6} - 2x) = \frac{1}{6}$$

با اطلاعات مسأله داریم:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1 \quad (1)$$

از طرفین رابطه (۱) مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

$$P'(-2) = -2Q(-2) + 3 = -2(3) + 3 = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

$$x + 1 < 3 < 2x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 < 3 \Rightarrow x < 2 \\ 2x - 1 > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

راه‌حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 8)(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(2 + \sqrt[3]{x})(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 8)(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6(x + 8)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 2)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{6} = \frac{-6 \times 12}{6} = -12$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6 \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{-16 + 10}{6 \times \frac{1}{3 \times 4}} = -6 \times 2 = -12$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

گام دوم

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با توجه به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x(\cos x + \sin x)} \\&= \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2})} = -1\end{aligned}$$

گزینه ۴

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 2}{-2} = -2$$

$$f(2) = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 + \cos \pi x)(1 - \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

در مرحله اول صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج کسر ضرب می کنیم تا عبارت را به ساده ترین شکل ممکن به دست آوریم.

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x^2 - 2x} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{-2x}$$

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |x|}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

راه حل دوم: (فراتر از کتاب)

برای به دست آوردن حاصل حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a}|x + \frac{b}{2a}|$$

با استفاده از هم ارزی حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{-2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{1}|x + \frac{2}{2}|}{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x + 1}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-2x} = -1 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

گام دوم

باتوجه به گام اول داریم:

$$\sqrt{4x^2 + 9x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{4} \left| x + \frac{9}{8} \right| = 2 \left(x + \frac{9}{8} \right) = 2x + \frac{9}{4}$$

چون $x \rightarrow +\infty$ ، می‌توان در مخرج کسر از عبارت $\sqrt{x}$ در برابر $3x$ صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (2x + \frac{9}{4})}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x - \frac{9}{4}}{3x} = -\frac{1}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) برای به دست آوردن حاصل حد ابتدا عبارت $x(x + \sqrt{x^2 - \lambda})$ را در مزدوج عبارت $x + \sqrt{x^2 - \lambda}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

ب) چون $x \rightarrow -\infty$ ، در عبارت کسری به دست آمده، برای محاسبه حد حاصل تقسیم جملات پرتوان را در نظر می‌گیریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - \lambda}) &\times \frac{x - \sqrt{x^2 - \lambda}}{x - \sqrt{x^2 - \lambda}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + \lambda)}{x - \sqrt{x^2 - \lambda}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{x - \sqrt{x^2 - \lambda}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{2x} = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) شرط پیوستگی در نقطه ای به طول $x = 0$ عبارت است از:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

ب) در این تست $f(0) = a$ است پس برای این که تابع پیوسته باشد باید $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} = a$ باشد.

گام دوم

با به دست آوردن حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، شرط پیوستگی را بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \rightarrow \text{وجود ندارد}$$

بنابراین به ازای هیچ مقدار a تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

وقتی $x \rightarrow -4$ ، حاصل حد $\infty - \infty$ بوده و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام ابتدا با مخرج مشترک گیری میان دو کسر، عبارت را به ساده ترین شکل ممکن در آورده سپس حد آن را وقتی $x \rightarrow -4$ محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} &= \frac{x+19}{(x+4)(x-1)} + \frac{3}{x+4} \\ &= \frac{x+19+3(x-1)}{(x+4)(x-1)} = \frac{x+19+3x-3}{(x+4)(x-1)} = \frac{4x+16}{(x+4)(x-1)} \\ &= \frac{4(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{4}{x-1} \end{aligned}$$

حالا حاصل عبارت ساده شده را وقتی $x \rightarrow -4$ حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{-4-1} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

گام اول

الف) وقتی $x \rightarrow 0$ نتیجه می‌گیریم $x \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین $2x$ هم یک عدد غیر صحیح است. اگر $2x$ یک عدد غیر صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت $[-2x] + [2x] = -1$.

ب) وقتی $x \rightarrow 0$ ، حاصل حد عبارت $\frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ برابر $\frac{0}{0}$ بوده و مبهم است.

گام دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos^2 x + \cos x)}{1 - \sqrt{1+x^2}} \times \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{(1 - \cos x)(3)(2)}{1 - (1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(2 \sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \sin \frac{x}{2} \times \sin \frac{x}{2}}{x^2} = 3 \end{aligned}$$

نکته:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

راه دوم: با استفاده از هویتال به رفع ابهام کسر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos^2 x (\sin x)}{\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x (\sin x) \sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cos^2 x (\sqrt{1+x^2}) = 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

ابتدا تعیین می کنیم حاصل $[f \cos^2 \pi x]$ وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ برابر چه عددی می شود. با توجه به این که حاصل حد برابر $\frac{1}{6}$ است، مقادیر a و b و در نهایت مقدار $a + b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \rightarrow \frac{1}{6}^+ \Rightarrow x > \frac{1}{6} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos \pi x < \cos \frac{\pi}{6}$$

دقت کنید که در ناحیه اول مثلثاتی با افزایش مقدار x ، مقدار $\cos x$ کاهش پیدا می کند. چون πx از $\frac{\pi}{6}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $\cos \pi x$ از مقدار $\cos \frac{\pi}{6}$ کمتر خواهد بود.

$$\xrightarrow{\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \cos \pi x < \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cos^2 \pi x < \frac{3}{4} \xRightarrow{f} f \cos^2 \pi x < 3 \Rightarrow f \cos^2 \pi x \rightarrow 3^- \Rightarrow [f \cos^2 \pi x] = 2$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ برابر صفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{1}{6}$ است، اگر وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ مخرج کسر عددی غیر از صفر باشد حاصل حد برابر صفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{1}{6}$ داده شده پس باید وقتی $x \rightarrow \frac{1}{6}^+$ مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} ax + b = 0 \Rightarrow \frac{a}{6} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = -6b \quad (I)$$

با فرض $a = -6b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{2 - 12x}{ax + b} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{2 - 12x}{-6bx + b} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}^+} \frac{2(1 - 6x)}{b(-6x + 1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 4 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} a = -6b = -6 \times 4 = -24$$

بنابراین $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -24 + 4 = -20$$

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ حد تابع برابر $-\frac{1}{p}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگترین درجه صورت کسر با بزرگترین درجه مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگترین درجه x در صورت کسر ۱ است، پس $n = 1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی که $x \rightarrow +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^p + bx + c} \sim \sqrt{a}|x| + \frac{b}{2a}$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{1}|x| + (\frac{-3}{2})}{ax - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{2x - \sqrt{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x^2 + 3x}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{-6(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \frac{-3}{-6(-2-2)} = \frac{-3}{(-6)(-4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

گام اول

وقتی باقی‌مانده تقسیم عبارت $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-1)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 4$$

$$P(-1) = (-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow -a + 3 = 4 \Rightarrow a = 3 - 4 = -1 \Rightarrow a = -1$$

طبق سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(1) = 8$ و $P(-\frac{1}{2}) = 5$ است. همچنین داریم:

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + R(x) = ((x-1)(2x+1))Q(x) + R(x) \quad ; R(x) = ax + b$$

بنابراین:

$$P(1) = R(1) = a + b = 8$$

$$P(-\frac{1}{2}) = R(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -\frac{1}{2}a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2, \quad b = 8 - 2 = 6$$

$$R(x) = 2x + 6 \text{ پس:}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

گام دوم

ابتدا باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، محدوده دو ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & ; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

اکنون حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2(1) = 2$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

باتوجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ است، تابع در $x = 1$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x = 2(-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

$$f(-1) = 2(-1) = -2$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ و $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{3}^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^-} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{3}^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}^\pm} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^\pm} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^\pm} = \pm\infty$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

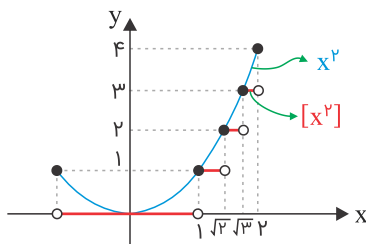
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ مقداری صحیح باشد، ناپیوسته است.

گام دوم

بهترین راه برای تشخیص نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, 2]$ ، رسم نمودار این تابع در بازه موردنظر است:



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در نقاط $x = -1$ و $x = 2$ ، $x = \sqrt{3}$ ، $x = \sqrt{2}$ ، $x = 1$ ناپیوسته است؛ بنابراین تابع در بازه $[-1, 2]$ دارای پنج نقطه ناپیوستگی است.

تابع در $x = 1$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x = 1$ برابرند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{a+3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1+a$$

$$\Rightarrow 1+a = \sqrt{a+3} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a+3 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \checkmark \\ a = -2 & \times \end{cases}$$

به ازای $a = -2$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{3}{4})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{ax+3} = \sqrt{x+3}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{3}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4}+3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در تابع به فرم $y = [f(x)]$ هر جا حاصل $f(x)$ برابر عدد صحیح شود، تابع در آن نقاط ناپیوسته است. بنابراین در بازه $[2, 2+k)$ حاصل عبارت جبری $x^2 - 3$ نباید برابر یک عدد صحیح شود. (البته در نقطه شروع بازه در صورتی که تابع از راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی‌شود). ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = [x^2 - 3] = [x^2] - 3$$

سپس بررسی می‌کنیم عبارت $[x^2]$ در اولین نقطه‌ای که بعد از $x = 2$ برابر یک عدد صحیح می‌شود کدام نقطه است. آن نقطه را برابر $2+k$ قرار داده و در نهایت مقدار k را محاسبه می‌کنیم.

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{اولین عدد صحیح بعد از ۴}} x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

پس تابع $f(x)$ به ازای $x = \sqrt{5}$ ناپیوسته می‌شود. $2+k$ را برابر $\sqrt{5}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$2+k = \sqrt{5} \Rightarrow k = \sqrt{5} - 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جمله صورت بر بزرگ‌ترین جمله مخرج به دست می‌آید.

ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجه صورت و بزرگ‌ترین درجه مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n = ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{3x^2} = \frac{a}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a ، حاصل $f(-1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{3(-1)^2 - 1} = \frac{2 + 3 + 1}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

تابع f به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & ; -1 < x < 1 \\ ax + b & ; (x \geq 1) \vee (x \leq -1) \end{cases}$$

تابع $x[x]$ در فاصله $(-1, 1)$ و تابع $ax + b$ در هر فاصله‌ای پیوسته است، پس فقط کافی است که تابع f در 1 و -1 پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x[x]) = 0$$

f در $x = 1$ پیوسته است، پس $a + b = 0$ یا $a = -b$ است. از طرفی f در -1 پیوسته است؛ پس:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x[x]) = (-1)[(-1)^+] = (-1)(-1) = 1$$

$$\Rightarrow -a + b = 1 \xrightarrow{b=-a} -a - a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^2 - 1$ برابر صفر است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$$

بنابراین داریم:

$$p(1) = 0, p(-1) = 0 \quad (*)$$

اکنون باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$$

$$\xrightarrow{x=2} Q(2) = p(2 - 1) + p(1 - 2) = p(1) + p(-1)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(2) = 0 + 0 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

راه حل اول:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3x+2)(x-4)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{(2 - \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(3x+2)(\cancel{2-\sqrt{x}})(2+\sqrt{x})(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{(\cancel{2-\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow 4} (-(3x+2)(2+\sqrt{x})(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)) \\ &= -14 \times 4 \times 2 = -112\end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{\frac{-2\sqrt{x}}{2\sqrt{3} - \sqrt{x}}} = \frac{14}{\frac{-2 \times 2}{2}} = -14 \times 1 = -112$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(a+2)}{2x} \\ \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}} &\frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} \times \frac{3x - \sqrt{4x^2 + 5}}{3x - \sqrt{4x^2 + 5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 4x^2 - 5}{2(x+1)(-3 - \sqrt{4x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-5(x-1)(x+1)}{12(x+1)} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همه نقاط این مجموعه پیوسته باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازه $x > 2$ و $x < 2$ به صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطه $x = 2$ بررسی کنیم. باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax + b = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + bx - 1 = 4 + 2b - 1 = 3 + 2b$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 2a + b = 3 + 2b = 5$$

داریم:

$$3 + 2b = 5 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$2a + b = 5 \Rightarrow 2a + 1 = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

نکته: اگر عبارت داخل جزء صحیح به سمت بی نهایت میل کند، می توان نتیجه گرفت جزء صحیح با عبارت داخل آن هم ارز است.
بررسی گزینه اول:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left(\frac{1}{x} \right) = 1$$

بررسی گزینه دوم:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{1}{x} \right) = 1$$

بررسی گزینه سوم:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

پس حاصل حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$ متناهی نیست.
بررسی گزینه چهارم:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = (+\infty)(0) = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

معادله سهمی و خط را می نویسیم:

$$f(x) = a(x - 0)(x - 4) = ax(x - 4)$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

$$g(x) = \frac{-x}{4} + 1 = \frac{-1}{4}(x - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x(x - 4) - \frac{1}{4}(x - 4)}{4 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x - 4)(x + 1)}{-(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{5}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه $\mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.
ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازه $x > 2$ و $x < 2$ به صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است؛ بنابراین کافی است پیوستگی تابع را فقط در نقطه $x = 2$ بررسی کنیم. باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + ax - 5 = 2^2 + 2a - 5 = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = 2a - 1$$

$$f(2) = 2a - 1$$

به ازای هر مقدار حقیقی a ، تساوی $2a - 1 = 2a - 1$ برقرار است.

ابتدا وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، حاصل $\left[\frac{1}{x}\right]$ را به دست می‌آوریم. با داشتن مقدار $\left[\frac{1}{x}\right]$ حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = [0^-] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x}\right] = (-\infty)(-1) = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) $x \rightarrow 2^-$ یعنی $x < 2$ است، باتوجه به این نکته تعیین می‌کنیم علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است یا منفی سپس آن را از قدر مطلق خارج می‌کنیم.

ب) وقتی $x \rightarrow 2^-$ حاصل صورت و مخرج کسر برابر صفر حدی می‌شود. پس برای رفع ابهام می‌توانیم هم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و هم از قاعده هوییتال استفاده کنیم.

گام دوم

$$\left. \begin{aligned} x^2 - x - 2 &= (x - 2)(x + 1) \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x^2 - x - 2| = -(x - 2)(x + 1)$$

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-x^2 + x + 2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{(4x^2 - x^2 - 12)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x - 2)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x + 1)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x + 2)} \\ &= \frac{-(2 + 1)(4 + 4)}{3(2 + 2)} = \frac{-3 \times 8}{3 \times 4} = -2 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب درسی)

در این روش حاصل حد را با استفاده از قاعده هوییتال به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 1)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \\ &\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 12}}} = \frac{-4 + 1}{2 - \frac{2}{\sqrt{4 + 12}}} = \frac{-3}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)[x] & ; -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & ; x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x = 0$ و $x = 2$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2-1)[2^-] = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + 2a + b = 1 \quad (I)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0-1)[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} a = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینه ۴ درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

ضابطه $g \circ f(x)$ یا همان $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. حد تابع $g(f(x))$ را وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، به دست می آوریم. دقت کنید اگر در محاسبه حد به عدد $a^{-\infty}$ که در آن $a > 1$ است برخوردیم حاصل برابر صفر می شود.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{2(2^{\frac{1}{x}}) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(2^{\frac{1}{x}}) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \frac{2(2^{-\infty}) - 3}{(2^{-\infty}) + 1} = \frac{(2 \times 0) - 3}{0 + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} \omega^{-\nu_{n+1}} = \frac{1}{\omega^{\nu_{n+1}}} \rightarrow 0 \\ \omega^{\nu_n} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{\nu_n} - \omega^{-\nu_{n+1}}}{2 \times \omega^{\nu_n} + \omega^{-\nu_{n+1}}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{\nu_n} - \omega^{-\nu_{n+1}}}{2 \times \omega^{\nu_n} + \omega^{-\nu_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{\nu_n}}{2 \times \omega^{\nu_n}} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{\nu_n} - \omega^{-\nu_{n+1}}}{2 \times \omega^{\nu_n} + \omega^{-\nu_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{-\nu_{n+1}}(\omega^{\nu_{n+1} - \nu_n} - 1)}{\omega^{-\nu_{n+1}}(2 \times \omega^{\nu_{n+1} - \nu_n} + 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\omega^{\nu_{n+1} - \nu_n} - 1}{2 \times \omega^{\nu_{n+1} - \nu_n} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\omega^{\nu_{n+1} - \nu_n}} \left(1 - \frac{1}{\cancel{\omega^{\nu_{n+1} - \nu_n}}} \right)}{\cancel{\omega^{\nu_{n+1} - \nu_n}} \left(2 + \frac{1}{\cancel{\omega^{\nu_{n+1} - \nu_n}}} \right)} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{\omega^{\nu_{n+1}}} \rightarrow 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} = \frac{0}{0}$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} \times \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})}{4 - (2 + \sqrt{3 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})}{2 - \sqrt{3 - x}} \times \frac{2 + \sqrt{3 - x}}{2 + \sqrt{3 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})(2 + \sqrt{3 - x})}{4 - 3 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})(2 + \sqrt{3 - x}) = 1(2+2)(2+2) = 16 \end{aligned}$$

راه حل دوم: (فراتر از کتاب)

استفاده از قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 5}{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}} = \frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = 16$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

راه حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 2 \left| x + \frac{1}{4} \right| \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 2(x + \frac{1}{4})) = -\frac{1}{2}$$

راه حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + \sqrt{4x^2 + x})(2x - \sqrt{4x^2 + x})}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + x)}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

در همسایگی محذوف متقارن داده شده عدد ۳ حذف شده است پس عدد ۳ مرکز همسایگی است.

گام دوم

عدد ۳ مرکز همسایگی است.

$$3 = \frac{3a - 7 + a + 5}{2} \Rightarrow 6 = 4a - 2 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس همسایگی محذوف متقارن به صورت $\{3\} - (7, -1)$ درمی‌آید. بنابراین، شعاع همسایگی برابر است با:

$$\text{شعاع همسایگی} = \frac{7 - (-1)}{2} = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} + 1 \right]$$

$$= \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 = 2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1$$

عبارت خطی $x - \frac{1}{3}$ در نقاط صحیح کننده $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3} \right\}$ از بازه $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{5}{3})^+} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 [(-2)^+] + 1 = 2(-2) + 1 = -3$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{5}{3})^-} \left(2 \left[x - \frac{1}{3} \right] + 1 \right) = 2 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^- \right] + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad f\left(\frac{5}{3}\right) = 3$$

پس f در $-\frac{5}{3}$ پیوستگی راست و در $\frac{5}{3}$ پیوستگی چپ دارد. در نهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطه ناپیوستگی داریم. کلید سنجش ۳ نقطه است.